2023 年高考押题预测卷 01

理科数学·全解全析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2-5x-6\le 0\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x(3-x)\ge 0\}$，$B=\{1,2,4\}$ 则集合 $\{-1,5,6\}$ 等于（　　）

A．$(\complement_U A)\cap B$　　B．$\complement_U(A\cup B)$

C．$A\cap(\complement_U B)$　　D．$\complement_U(A\cap B)$

【答案】B

【分析】先表示出集合 U 与集合 A 的等价条件，然后根据交集，并集和补集的定义进行分析求解即可．

【详解】由题意知 $U=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,-1\le x\le 6\}=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,0\le x\le 3\}=\{0,1,2,3\}$，

所以 $A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，$\therefore\{-1,5,6\}=\complement_U(A\cup B)$，

故选：B．

2．设 i 为虚数单位，且 $\dfrac{5}{1+a\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$，则 $1-a\mathrm{i}$ 的虚部为（　　）

A．-2　　B．2　　C．$2\mathrm{i}$　　D．$-2\mathrm{i}$

【答案】B

【分析】由复数的乘法运算化简，再由复数相等求出 $a=-2$，即可求出 $1-a\mathrm{i}$ 的虚部.

【详解】由 $\dfrac{5}{1+a\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$ 可得：$5=(1+2\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})=(a+2)\mathrm{i}-2a+1$，

则 $\begin{cases}a+2=0\\-2a+1=5\end{cases}\Rightarrow a=-2$，所以 $1-a\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$ 的虚部为 2.

故选：B.

3．已知向量 $\vec a$，$\vec b$ 满足 $|\vec a|=2$，$|\vec b|=1$，$\vec a\perp\vec b$，若 $(\vec a+\vec b)\perp(\vec a-\lambda\vec b)$，则实数 λ 的值为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．$\dfrac{9}{2}$

【答案】C

【分析】由向量垂直列出方程，结合向量的数量积运算性质求解.

【详解】$\because$ $\vec a\perp\vec b$，$\therefore\vec a\cdot\vec b=0$

$\because(\vec a+\vec b)\perp(\vec a-\lambda\vec b)$，$\therefore(\vec a+\vec b)\cdot(\vec a-\lambda\vec b)=\vec a^2-\lambda\vec b^2=0$

$\because|\vec a|=2,|\vec b|=1$，$\therefore 4-\lambda=0$，即 $\lambda=4$.

故选：C.

4．意大利数学家斐波那契以兔子繁殖数量为例,引入数列: $1,1,2,3,5,8,\ldots$,该数列从第三项起,每一项都等于前

两项的和,即递推关系式为 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, n\in N^*$,故此数列称为斐波那契数列,又称"兔子数列".已知满足上述递推关系式的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=A\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$,其中 A,B 的值可由 a_1 和 a_2 得到,比如兔子数列中 $a_1=1, a_2=1$ 代入解得 $A=\frac{1}{\sqrt{5}}, B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.利用以上信息计算 $\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5\right]=($　$)$.($[x]$表示不超过 x 的最大整数)(　)

A．10　　B．11　　C．12　　D．13

【答案】B

【分析】根据题不妨设 $A=B=1$,求出 a_1, a_2,进而得到 a_5,通过 $\{a_n\}$ 的第五项,即可得到 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$ 之间的关系,根据 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$ 的范围可大致判断 $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5$ 的范围,进而选出选项.

【详解】解:由题意可令 $A=B=1$,

所以将数列 $\{a_n\}$ 逐个列举可得:

$a_1=1, a_2=3, a_3=a_1+a_2=4, a_4=a_3+a_2=7, a_5=a_4+a_3=11$,

故 $a_5=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5=11$,

因为 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\in(-1,0)$,

所以 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5\in(11,12)$,

故 $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5\right]=11$.

故选:B

5．已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F,点 M 在抛物线上(异于顶点),$\overline{OM}=2\overline{ON}$(点 O 为坐标原点),过点 N 作直线 OM 的垂线与 x 轴交于点 P,则 $2|OP|-|MF|=$(　)

A．6　　B．$2\sqrt{5}$　　C．4　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】A

【分析】设 $M\left(\frac{y_0^2}{8}, y_0\right)$,由 $\overline{OM}=2\overline{ON}$,得 N 为 OM 的中点,表示 NP 的方程,求出点 P 的坐标,结合抛物

线的定义求得结果.

【详解】法一：依题意，设 $M\left(\frac{y_0^2}{8},y_0\right)$，由 $\overline{OM}=2\overline{ON}$，得 N 为 OM 的中点且 $N\left(\frac{y_0^2}{16},\frac{y_0}{2}\right)$，

则 $k_{OM}=\frac{8}{y_0}$，易得直线 OM 的垂线 NP 的方程为 $y-\frac{y_0}{2}=-\frac{y_0}{8}\left(x-\frac{y_0^2}{16}\right)$.

令 $y=0$，得 $x=\frac{y_0^2}{16}+4$，故 $P\left(\frac{y_0^2}{16}+4,0\right)$，由抛物线的定义易知 $|MF|=\frac{y_0^2}{8}+2$，

故 $2|OP|-|MF|=2\left(\frac{y_0^2}{16}+4\right)-\left(\frac{y_0^2}{8}+2\right)=6$，

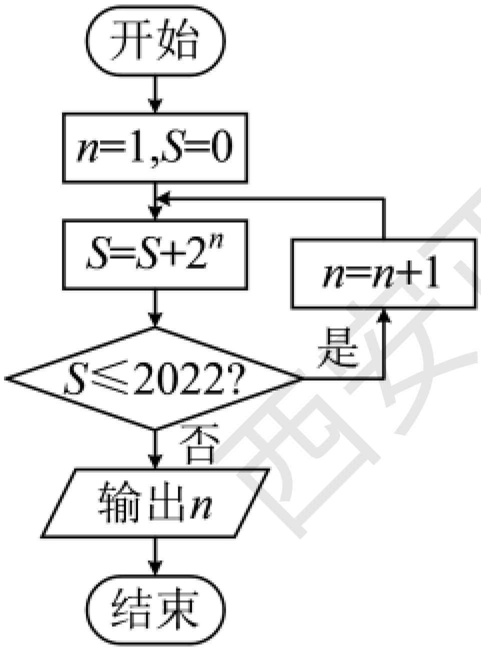
故选:A.

法二：特殊值法.不妨设 $M(8,8)$，则 $N(4,4)$，则 $k_{OM}=1$，易得直线 OM 的垂线 NP 的方程为 $y-4=-(x-4)$.

令 $y=0$，得 $x=8$，故 $P(8,0)$，又 $|MF|=10$，故 $2|OP|-|MF|=16-10=6$.

故选:A.

6．执行下面的程序框图，则输出的 $n=$（　）



A．9　　　　B．10　　　　C．11　　　　D．12

【答案】B

【分析】按照迭代方式代入根据格式判断规律为等比数列的求和，按照等比数列求和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 求出数据逐渐做判断即可得解.

【详解】经过判断框时，

第一个 S 变为 2^1£ 2022，n 变为 2，

第二个 S 变为 $2^1+2^2=2^3-2$£ 2022，n 变为 3，

第三个 S 变为 $2^1+2^2+2^3=2^4-2=14\le 2022$，$n$ 变为 4，

第四个 S 变为 $2^1+2^2+2^3+2^4=2^5-2=30\le 2022$，$n$ 变为 5，

$\cdots$

第九个 S 变为 $2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^9=2^{10}-2=1022\le 2022$，$n$ 变为 10，

第十个 S 变为 $2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^9+2^{10}=2^{11}-2=2046>2022$，判断框按照“否”输出 $n=10$.

故选：B.

7．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，P 分别为 A_1B，A_1C_1，A_1D 的中点，则下列结论中错误的是（　）

A．$MN//AD_1$　　　　B．平面 $MNP//$ 平面 BC_1D

C．$MN\perp CD$　　　　D．平面 $MNP\perp$ 平面 A_1BD

【答案】D

【分析】求得 MN 与 AD_1 位置关系判断选项 A；求得平面 MNP 与平面 BC_1D 位置关系判断选项 B；求得 MN 与 CD 位置关系判断选项 C；求得平面 MNP 与平面 A_1BD 位置关系判断选项 D.

【详解】对 A，在 $\triangle A_1BC_1$ 中，因为 M，N 分别为 A_1B，A_1C_1 的中点，

所以 $MN//BC_1$. 又 $BC_1//AD_1$，所以 $MN//AD_1$，A 正确.

对 B，在 $\triangle A_1BD$ 中，因为 M，P 分别为 A_1B，A_1D 的中点，

所以 $MP//BD$. 因为 $MP\not\subset$ 平面 BC_1D，$BD\subset$ 平面 BC_1D，

所以 $MP//$ 平面 BC_1D.

因为 $MN//BC_1$，$MN\not\subset$ 平面 BC_1D，$BC_1\subset$ 平面 BC_1D，

所以 $MN//$ 平面 BC_1D. 又因为 $MP\cap MN=M$，$MP,MN\subset$ 平面 MNP，

所以平面 $MNP//$ 平面 BC_1D，B 正确.

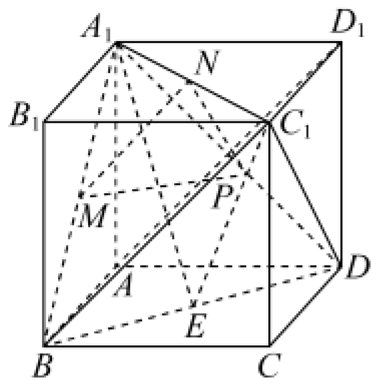
对 C，因为 $MN//AD_1$，$AD_1\perp CD$，所以 $MN\perp CD$，C 正确.

对 D，取 BD 的中点 E，连接 A_1E，EC_1，则 $\angle A_1EC_1$ 是二面角 A_1-BD-C_1 的平面角.

设正方体棱长为 a，则 $\cos\angle A_1EC_1=\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2-\left(\sqrt{2}a\right)^2}{2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2}=\dfrac{1}{3}\neq 0$，

又 $0^\circ<\angle A_1EC_1<180^\circ$，则 $\angle A_1EC_1\neq 90^\circ$，所以平面 A_1BD 与平面 BC_1D 不垂直.

又平面 $MNP//$ 平面 BC_1D，所以平面 MNP 与平面 A_1BD 不垂直，D 错误.



故选：D.

8．设等比数列 $\{a_n\}$ 中，a_3, a_7 使函数 $f(x)=x^3+3a_3x^2+a_7x+a_3^2$ 在 $x=-1$ 时取得极值 0，则 a_5 的值是（　）

A．$\pm\sqrt{3}$ 或 $\pm3\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2}$　　C．$\pm3\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

【答案】D

【分析】由极值点和极值可构造方程组求得 a_3, a_7，代回验证可知 $\begin{cases}a_3=2\\a_7=9\end{cases}$ 满足题意；结合等比数列性质可求得结果.

【详解】由题意知：$f'(x)=3x^2+6a_3x+a_7$，

$\because f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值 0，$\therefore \begin{cases}f(-1)=-1+3a_3-a_7+a_3^2=0\\f'(-1)=3-6a_3+a_7=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a_3=1\\a_7=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_3=2\\a_7=9\end{cases}$；

当 $a_3=1$，$a_7=3$ 时，$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq0$，

\ $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不合题意；

当 $a_3=2$，$a_7=9$ 时，$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-3,-1)$ 时，$f'(x)<0$；

\ $f(x)$ 在 $(-\infty,-3),(-1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-3,-1)$ 上单调递减，

$\therefore x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，满足题意；

$\therefore a_5^2=a_3a_7=18$，又 a_5 与 a_3, a_7 同号，$\therefore a_5=3\sqrt{2}$.

故选：D.

9．设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$BC=6$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为（　）

A．$3\sqrt{3}$　　　　B．$6\sqrt{3}$　　　　C．$12\sqrt{3}$　　　　D．$18\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】M是$\triangle ABC$外心，O是球心，求出 OM，当 D是 MO 的延长线与球面交点时，三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大，由此求得最大体积即可.

【详解】如图，M是$\triangle ABC$外心，即$\triangle ABC$所在截面圆圆心，设圆半径为r，O是球心，

因为 $AB=AC=2\sqrt{3}$，$BC=6$，

由余弦定理可得：$\cos\angle BAC=\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-6^2}{2\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $2r=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$，则 $r=2\sqrt{3}$

$MB=2\sqrt{3}$，$OB=4$，

$OM\perp$平面 ABC，$BM\subset$平面 ABC，则 $OM\perp BM$，

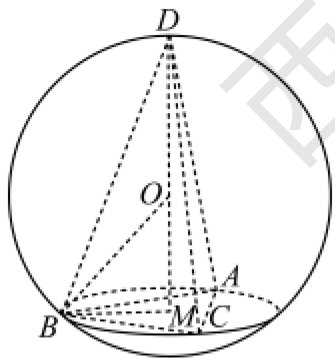
所以 $OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=2$，

当 D是 MO 的延长线与球面交点时，三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大，

此时棱锥的高为 $DM=2+4=6$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2\times\sin 120^\circ=3\sqrt{3}$，

所以棱锥体积为 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DM=\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times 6=6\sqrt{3}$.

故选：B.



10．2020 年疫情期间，某县中心医院分三批共派出 6 位年龄互不相同的医务人员支援武汉六个不同的方舱医院，每个方舱医院分配一人.第一批派出一名医务人员的年龄为 P_1，第二批派出两名医务人员的年龄最大者为 P_2，第三批派出三名医务人员的年龄最大者为 P_3，则满足 $P_1<P_2<P_3$的分配方案的概率为（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{20}$　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】A

【分析】假设6位医务人员年龄排序为$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$，由a_6必在第三批，将派遣方式按第一批所派遣的人员不同分成四类，求出满足$P_1<P_2<P_3$的派遣方法数，再计算总派遣方法数，即可求概率.

【详解】假设6位医务人员年龄排序为$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$，由题意知，年龄最大的医务人员必在第三批，派遣方式如下：

1、第一批派a_4，第二批年龄最大者为a_5，第三批年龄最大者为a_6：剩下的医务人员一个在第二批，两个在第三批有$C_3^1=3$种方法；

2、第一批派a_3，第二批年龄最大者为a_4或a_5，第三批年龄最大者为a_6：当第二批最大者为a_5，则有C_3^1种方法，当第二批最大者为a_4，则有C_2^1种方法，共$C_3^1+C_2^1=5$种方法；

3、第一批派a_2，第二批年龄最大者为a_3或a_4或a_5，第三批年龄最大者为a_6：当第二批最大者为a_5，则有C_3^1种方法，当第二批最大者为a_4，则有C_2^1种方法，当第二批最大者为a_3，则有1种方法，共$C_3^1+C_2^1+1=6$种方法；

4、第一批派a_1，第二批年龄最大者为a_3或a_4或a_5，第三批年龄最大者为a_6：当第二批最大者为a_5，则有C_3^1种方法，当第二批最大者为a_4，则有C_2^1种方法，当第二批最大者为a_3，则有1种方法，共$C_3^1+C_2^1+1=6$种方法；

$\therefore 3+5+6+6=20$种方法，而总派遣方法有$C_6^1C_5^2C_3^3=60$种，

$\therefore$满足$P_1<P_2<P_3$的分配方案的概率为$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：应用分类分步计数原理，结合题设含义，按第一批派遣的人员不同将派遣方式分类，再根据第二批的最大年龄者的不同确定各类的派遣方法数.

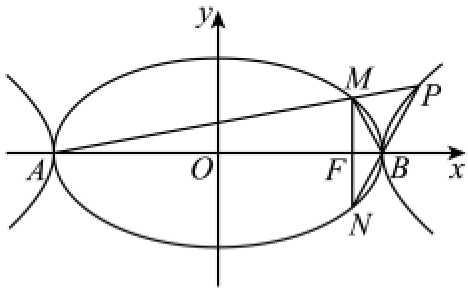
11．已知A、B是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的公共顶点，$P$是双曲线上一点，$PA$，$PB$交椭圆于$M$，$N$.若$MN$过椭圆的焦点$F$，且$\tan\angle AMB=-3$，则双曲线的离心率为（　）

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【分析】设出点P，M的坐标，借助双曲线、椭圆的方程及斜率坐标公式可得$MN\perp x$轴，再利用和角的正切公式求出a，b的关系作答.

【详解】如图，设$P(x_0,y_0)$，点P,M,A共线，点P,B,N共线，所在直线的斜率分别为k_{PA},k_{PB}，



点 P 在双曲线上，即 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，有 $\frac{y_0}{x_0-a}\cdot\frac{y_0}{x_0+a}=\frac{b^2}{a^2}$，因此 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$，

点 $M(x_1,y_1)$ 在椭圆上，即 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，有 $\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}=-\frac{b^2}{a^2}$，直线 MA,MB 的斜率 k_{MA},k_{MB}，有 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\frac{b^2}{a^2}$，

即 $k_{PA}\cdot k_{MB}=-\frac{b^2}{a^2}$，于是 $k_{MB}=-k_{PB}=-k_{BN}$，即直线 MB 与 NB 关于 x 轴对称，

又椭圆也关于 x 轴对称，且 M,N 过焦点 F，则 $MN\perp x$ 轴，令 $F(c,0)$，由 $\begin{cases}x=c\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 得 $|y|=\frac{b^2}{a}$，

显然 $\tan\angle AMF=\frac{a+c}{\frac{b^2}{a}}=\frac{a^2+ac}{b^2}$， $\tan\angle BMF=\frac{a-c}{\frac{b^2}{a}}=\frac{a^2-ac}{b^2}$，

$$\tan\angle AMB=\frac{\tan\angle AMF+\tan\angle BMF}{1-\tan\angle AMF\cdot\tan\angle BMF}=\frac{\frac{a^2+ac}{b^2}+\frac{a^2-ac}{b^2}}{1-\frac{a^2+ac}{b^2}\cdot\frac{a^2-ac}{b^2}}=\frac{2a^2}{b^2-a^2}=-3,$$

解得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：D

【点睛】方法点睛：求解椭圆或双曲线的离心率的三种方法：

定义法：通过已知条件列出方程组，求得 a,c 得值，根据离心率的定义求解离心率 e；

齐次式法：由已知条件得出关于 a,c 的二元齐次方程，然后转化为关于 e 的一元二次方程求解；

特殊值法：通过取特殊值或特殊位置，求出离心率.

12．设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$ 和 $g'(x)$．若 $f(x)-g(4-x)=2$，$g'(x)=f'(x-2)$，且 $f(x+2)$ 为奇函数，则下列说法中一定正确的是（　）

A．$\sum_{k=1}^{2023}f(k)=0$　　B．$\sum_{k=1}^{2023}g(k)=0$

C．$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(2+x)+f(-x)=0$　　D．$g(3)+g(5)=4$

【答案】A

【分析】由 $g'(x)=f'(x-2)$ 得 $g(x)=f(x-2)+a$，结合已知得 $f(x)=f(2-x)+a+2$，进而有 $a=-2$，由

$f(x)=f(2-x)$可判断C项中的对称性；由$f(x+2)$为奇函数可得$y=f(x)$的周期、对称性及特殊值，从而化简判断A正误；B、D由$g(x)=f(x-2)-2$，结合A即可判断.

【详解】C：由$g'(x)=f'(x-2)$，则$g(x)=f(x-2)+a$，则$g(4-x)=f(2-x)+a$，

又$f(x)-g(4-x)=2$，所以$f(x)=f(2-x)+a+2$，令$x=1$得$a+2=0$，即$a=-2$.

所以$f(x)=f(2-x)$，所以函数$f(x)$的图象关于$x=1$对称，

而$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(2+x)+f(-x)=0$，则$f(x)$的图象关于$(1,0)$对称，错；

A：$f(x+2)$为奇函数，则$y=f(x)$关于$(2,0)$对称，且$f(2+x)+f(2-x)=0$，

$\therefore f(2)=0$，$f(0)=0$，$f(1)+f(3)=0$，$f(4)+f(0)=0$，$\therefore f(4)=0$.

又$f(x+2)=-f(-x+2)=-f(x)$，$\therefore f(x)=-f(x+2)=f(x+4)$，

$\therefore y=f(x)$的周期$T=4$，

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)=0$，对；

D：因为$g(4-x)=f(2-x)+a=f(2-x)-2$，所以$g(x)=f(x-2)-2$，

所以$g(3)+g(5)=f(1)-2+f(3)-2=-4$，错；

B：$\sum\limits_{k=1}^{2023}g(k)=f(-1)-2+f(0)-2+f(1)-2+\dots+f(2021)-2=\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)-2\times 2023=-4046$，错.

故选：A

【点睛】关键点睛：利用导数得$g(x)=f(x-2)+a$，结合已知得到$f(x)=f(2-x)$，进而求其周期和对称性，应用周期和对称性求$\sum\limits_{2023}^{k=1}f(k)$、$\sum\limits_{k=1}^{2023}g(k)$、$g(3)+g(5)$的值.

第II卷

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．某校为促进拔尖人才培养开设了数学、物理、化学、生物、信息学五个学科竞赛课程，现有甲、乙、丙、丁四位同学要报名竞赛课程，由于精力和时间限制，每人只能选择其中一个学科的竞赛课程，则恰有两位同学选择数学竞赛课程的报名方法数为________.

【答案】96

【分析】利用分步加法和分类乘法原理，先安排4名同学的2名选择数学竞赛，在安排剩下的2名同学到其他竞赛课程中即可.

【详解】由题知先安排甲、乙、丙、丁四位同学的2名选择数学竞赛课程，

则有：$C_4^2=6$种情况，

剩下2名同学在选择物理、化学、生物、信息学四个学科竞赛课程时有：

①2名同学选择1个学科竞赛则有：$C_4^1=4$种情况，

②2名同学各选择1个学科竞赛则有$C_4^1C_3^1=12$种情况，

所以恰有两位同学选择数学竞赛课程的报名方法数为：

$6\times(12+4)=96$种情况，

故答案为：96.

14．直线$2x-y-4=0$分别与x轴、y轴交于A,B两点，点P在圆$x^2+(y-2)^2=5$上，则$\triangle PAB$面积的取值范围是___________.

【答案】$[1,11]$

【分析】首先由直线方程求得A,B坐标，得到$|AB|$；利用点到直线距离公式求得圆心到直线AB的距离d_1，从而得到点P到直线距离d_2的范围，利用三角形面积公式可求得结果.

【详解】因为直线$2x-y-4=0$分别与x轴、y轴交于A,B两点，

所以$A(2,0)$，$B(0,-4)$

所以$|AB|=\sqrt{(2-0)^2+(0+4)^2}=2\sqrt{5}$

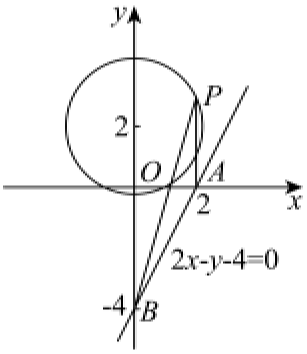
圆$x^2+(y-2)^2=5$的圆心的坐标为$(0,2)$，半径$r=\sqrt{5}$，

所以圆心到直线$2x-y-4=0$距离$d_1=\dfrac{|0-2-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，

所以P到直线$2x-y-4=0$距离$d_2\in[d_1-r,d_1+r]$，即$d_2\in\left[\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{11\sqrt{5}}{5}\right]$，

$\therefore S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d_2\in[1,11]$.

故答案为：$[1,11]$.



15．已知函数 $f(x)=m\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin x+2$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ 上有两个不同的零点，则满足条件的所有 m 的值组成的集合是_________．

【答案】$\{-2\sqrt{2},-3\}$

【分析】将原函数转化为同角三角函数 $f(x)=m\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)+1$，再利用对勾函数的性质数形结合，分类讨论处理即可.

【详解】解：$f(x)=m\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2=m\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)+1$，

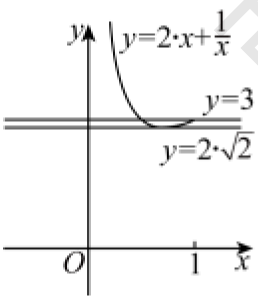
令 $t=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\in[0,1]\left(x\in\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]\right)$，

则 $m\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)+1=2t^2+mt+1$，

则 $f(x)=0\Leftrightarrow 2t^2+mt+1=0(*)$

当 $t=0$ 时，显然 $f(x)=0$ 无解；当 $1\geq t>0$ 时 $(*)$ 可化为 $-m=2t+\frac{1}{t}$.

利用对勾函数的性质与图象可知（如下图所示）：$-m\in\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$



①当 $-m=2\sqrt{2}$ 时，即 $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $x=\pi$ 或 $x=2\pi$，符合题意；

②当 $-m=3$ 时，即 $t=1$ 或 $t=\frac{1}{2}$，此时 $x=\frac{3\pi}{2}$ 或 $x=\frac{5\pi}{6}$，符合题意；

③当$-m>3$时，即$t<\frac{1}{2}$，由$t=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2}$，$\left(x\in\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]\right)$可得$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$，

易知当$t=t_0<\frac{1}{2}$时，只有一个解x_0满足，不符合题意；

④当$-m\in\left(2\sqrt{2},3\right)$时，$t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$即$\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

方程$-m=2t+\frac{1}{t}$有两根，不妨记为t_1,t_2，其中$t_1=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，只有一个根，

$t_2=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$有两个根，故方程有3个解，也不符合题意.

∴满足条件的所有m的值组成的集合是：$\left\{-2\sqrt{2},-3\right\}$.

故答案为：$\left\{-2\sqrt{2},-3\right\}$

16．在同一平面直角坐标系中，P，Q分别是函数$f(x)=axe^x-\ln(ax)$和$g(x)=\frac{2\ln(x-1)}{x}$图象上的动点，若对任意$a>0$，有$|PQ|\geq m$恒成立，则实数m的最大值为______．

【答案】$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【分析】利用同构思想构造$w(x)=e^x-x$，得到其单调性，得到$axe^x-\ln(ax)-x\geq 1$，再构造$j(x)=x-\frac{2\ln(x-1)}{x}$，$x>1$，求导得到其单调性及其最小值，设设$P\left(n,ane^n-\ln(an)\right),Q\left(t,\frac{2\ln(t-1)}{t}\right)$，利用基本不等式得到$|PQ|\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$，求出答案.

【详解】$axe^x-\ln(ax)-x=e^{x+\ln ax}-(x+\ln ax)$，令$w(x)=e^x-x$，$x\in\mathbf{R}$，

则$w'(x)=e^x-1$

当$x\in(0,+\infty)$时，$w'(x)>0$，$w(x)=e^x-x$单调递增，当$x\in(-\infty,0)$时，$w'(x)<0$，$w(x)=e^x-x$单调递减，

故$w(x)=e^x-x$在$x=0$处取得极小值，也是最小值，故$w(x)\geq e^0-0=1$，

故$axe^x-\ln(ax)-x=e^{x+\ln ax}-(x+\ln ax)\geq 1$，当且仅当$x+\ln ax=0$时，等号成立，

令$j(x)=x-\frac{2\ln(x-1)}{x}$，$x>1$，

则$j'(x)=1-\dfrac{\frac{2x}{x-1}-2\ln(x-1)}{x^2}=\dfrac{x^2-\frac{2x}{x-1}+2\ln(x-1)}{x^2}$，

令 $k(x)=x^2-\frac{2x}{x-1}+2\ln(x-1)$，

则 $k'(x)=2x-\frac{2x-2-2x}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}=2x+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

故 $k(x)=x^2-\frac{2x}{x-1}+2\ln(x-1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $k(2)=0$，故当 $x\in(1,2)$ 时，$k(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$k(x)>0$，

故 $x\in(1,2)$ 时，$j'(x)<0$，$j(x)$ 单调递减，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$j'(x)>0$，$j(x)$ 单调递增，

故 $j(x)=x-\frac{2\ln(x-1)}{x}$ 在 $x=2$ 处取得极小值，也时最小值，最小值为 $j(2)=2$，

设 $P(n,ane^n-\ln(an)),Q\left(t,\frac{2\ln(t-1)}{t}\right)$，

由基本不等式得，$|PQ|^2=(t-n)^2+\left((ane^n-\ln(an))-\frac{2\ln(t-1)}{t}\right)^2$

$\geq\frac{\left(t-\frac{2\ln(t-1)}{t}+ane^n-\ln an-n\right)^2}{2}\geq\frac{(2+1)^2}{2}=\frac{9}{2}$，

当且仅当 $t-n=(ane^n-\ln(an))-\frac{2\ln(t-1)}{t}$，$t=2$，$n+\ln an=0$ 时，等号成立，

故 $|PQ|\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则 $m_{\max}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【点睛】导函数求解取值范围时，当函数中同时出现 e^x 与 $\ln x$，通常使用同构来进行求解，本题 $axe^x-\ln(ax)-x$ 变形得到 $e^{x+\ln ax}-(x+\ln ax)$，从而构造 $w(x)=e^x-x$ 进行求解.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17．在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边长分别为 a，b，c，且满足 $a-3b+6b\sin^2\frac{A+B}{2}=0$．

(1)求证：$a+3b\cos C=0$；

(2)求 $\tan A$ 的最大值．

【答案】(1)证明见解析

(2)$\frac{3}{4}$

【分析】（1）利用三角形内角性质以及三角函数诱导公式，根据余弦定理，整理等式，结合半角公式，可得答案；

（2）利用正弦定理，三角函数内角性质以及同角三角函数的基本关系，整理出关于角 B 的函数解析式，利

用基本不等式，可得答案.

【详解】（1）$\because a-3b+6b\sin^2\dfrac{A+B}{2}=0$，

$\therefore a-3b+6b\sin^2\dfrac{\pi-C}{2}=a-3b+6b\cos^2\dfrac{C}{2}=0$，

$\therefore a-3b+6b\cdot\dfrac{1+\cos C}{2}=0$，

$\therefore a+3b\cos C=0$.

（2）由（1）可得：$\sin A+3\sin B\cos C=0$，且 C 为钝角，

即 $4\sin B\cos C+\cos B\sin C=0$，

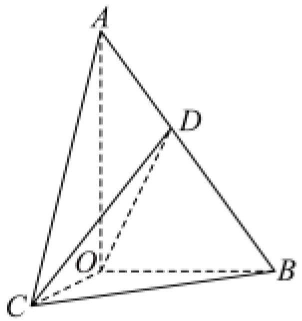
即 $4\tan B+\tan C=0$，$\tan C=-4\tan B$，

$$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\frac{3\tan B}{4\tan^2 B+1}=\frac{3}{4\tan B+\dfrac{1}{\tan B}}\le\frac{3}{2\sqrt{4\tan B\times\dfrac{1}{\tan B}}}=\frac{3}{4},$$

当且仅当 $4\tan B=\dfrac{1}{\tan B}$，即 $\tan B=\dfrac{1}{2}$ 时取等号.

故 $\tan A$ 的最大值为 $\dfrac{3}{4}$.

18．如图，在 Rt△AOB 中，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，$AO=4$，$BO=2$，Rt△$AOC$ 可以通过 Rt△AOB 以直线 AO 为轴旋转得到，且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角．动点 D 在线段 AB 上．



(1)当 D 为 AB 的中点时，求异面直线 AO 与 CD 所成角的余弦值大小；

(2)求 CD 与平面 AOB 所成角最大时正弦值．

【答案】(1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

【分析】（1）建系，利用空间向量求异面直线夹角；

（2）设 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}$ 可得 $D(0,2(1-\lambda),4\lambda)$，利用空间向量求线面夹角结合二次函数分析运算.

【详解】（1）由题意可得：$AO\perp OB, AO\perp OC$，平面 $AOB\perp$ 平面 AOC，

平面 $AOB\cap$ 平面 $AOC=AO$，$OB\subset$ 平面 AOB，

所以 $OB\perp$ 平面 AOC，

如图，以 O 为坐标原点建立空间直角坐标系，则 $O(0,0,0), A(0,0,4), C(2,0,0), B(0,2,0)$，

若 D 为 AB 的中点，则 $D(0,1,2)$，

可得 $\overrightarrow{OA}=(0,0,4),\overrightarrow{CD}=(-2,1,2)$，

设异面直线 AO 与 CD 所成角 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{CD}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{8}{4\times3}=\frac{2}{3}$.

（2）若动点 D 在线段 AB 上，设 $D(x,y,z),\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA},\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{BD}=(x,y-2,z),\overrightarrow{BA}=(0,-2,4)$，可得 $\begin{cases}x=0\\y-2=-2\lambda\\z=4\lambda\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\y=2(1-\lambda)\\z=4\lambda\end{cases}$，

即 $D(0,2(1-\lambda),4\lambda)$，则 $\overrightarrow{CD}=(-2,2(1-\lambda),4\lambda)$，

由题意可知：平面 AOB 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$，

设 CD 与平面 AOB 所成角为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $\sin\alpha=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{CD}\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{2}{\sqrt{4+4(1-\lambda)^2+16\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{5\lambda^2-2\lambda+2}}$，

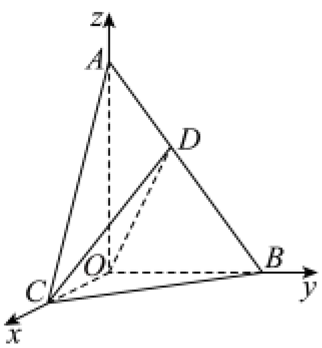
对于 $y=5\lambda^2-2\lambda+2$ 开口向上，对称轴为 $\lambda=\frac{1}{5}\in[0,1]$，

可得当 $\lambda=\frac{1}{5}$ 时，$y=5\lambda^2-2\lambda+2$ 取到最小值 $y_{\min}=5\times\left(\frac{1}{5}\right)^2-2\times\frac{1}{5}+2=\frac{9}{5}$，

所以 $\sin\alpha$ 的最大值为 $\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

注意到 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

故 CD 与平面 AOB 所成角的最大时正弦值 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.



19．学校团委和工会联合组织教职员工进行益智健身活动比赛.经多轮比赛后，由教师甲、乙作为代表进行决赛.决赛共设三个项目，每个项目胜者得10分，负者得-5分，没有平局.三个项目比赛结束后，总得分高的获得冠军.已知教师甲在三个项目中获胜的概率分别为0.4，0.5，0.75，各项目的比赛结果相互独立.甲、乙获得冠军的概率分别记为p_1，p_2.

(1)判断甲、乙获得冠军的实力是否有明显差别（如果$|p_1-p_2|\ge\sqrt{\frac{2|p_1^2-p_2^2|}{5}+0.1}$，那么认为甲、乙获得冠军的实力有明显差别，否则认为没有明显差别）；

(2)用X表示教师乙的总得分，求X的分布列与期望.

【答案】(1)甲、乙获得冠军的实力没有明显差别

(2)分布列见解析，5.25

【分析】（1）设教师甲在三个项目中获胜的事件依次为A,B,C，利用互斥事件和独立事件的概率共求得$p_1=0.575$和$p_2=0.425$，结合$|p_1-p_2|<\sqrt{\frac{2|p_1^2-p_2^2|}{5}+0.1}$，即可得到结论；

（2）根据题意，得到X的可能取值为$-15,0,15,30$，利用独立事件的概率乘法公式，求得相应的概率，得出分布列，结合期望的公式，即可求解.

【详解】（1）解：设教师甲在三个项目中获胜的事件依次为A,B,C，

则教师甲获得冠军的概率$p_1=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})$

$=0.4\times0.5\times0.75+0.6\times0.5\times0.75+0.4\times0.5\times0.75+0.4\times0.5\times0.25=0.15+0.225+0.15+0.05=0.575$，

由对立事件的概率公式，可得得$p_2=1-p_1=0.425$，

所以$\sqrt{\frac{2|p_1^2-p_2^2|}{5}+0.1}=\sqrt{0.16}=0.4$，解得$|p_1-p_2|=0.15$，

因为$|p_1-p_2|<\sqrt{\frac{2|p_1^2-p_2^2|}{5}+0.1}$，所以甲、乙获得冠军的实力没有明显差别.

（2）解：根据题意知，X的可能取值为$-15,0,15,30$，

可得$P(X=-15)=0.4\times0.5\times0.75=0.15$，

$P(X=0)=0.6\times0.5\times0.75+0.4\times0.5\times0.75+0.4\times0.5\times0.25=0.425$，

$P(X=15)=0.4\times0.5\times0.25+0.6\times0.5\times0.25+0.6\times0.5\times0.75=0.35$，

$P(X=30)=0.6\times0.5\times0.25=0.075$.

所以随机变量X的分布列为

X	-15	0	15	30
P	0.15	0.425	0.35	0.075

所以期望为 $E(X)=-15\times0.15+0\times0.425+15\times0.35+30\times0.075=5.25$.

20．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为 A，P 为 C 上一点，O 为原点，$|PA|=|PO|$，$\angle APO=90^{\circ}$，$\triangle APO$的面积为 1．

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设 B 为 C 的右顶点，过点$(1,0)$且斜率不为 0 的直线 l 与 C 交于 M,N 两点，证明：$3\tan\angle MAB=\tan\angle NBA$．

【答案】(1)$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{4}=1$

(2)见解析

【分析】（1）通过分析得 $P\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$，将其坐标代入椭圆方程，结合$\triangle APO$面积和$a,b,c$ 的关系即可求出椭圆方程；

（2）设直线 AM 的斜率为 k_1,直线 BN 的斜率为 k_2,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,直线 MN 的方程为 $x=my+1$，再将其与椭圆联立得到韦达定理式，通过化简得 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，最后计算 $\dfrac{k_1}{k_2}$，将上式代入即可证明其为定值.

【详解】（1）不妨设点 P 在 x 轴的上方,由椭圆的性质可知$|OA|=a$.

$\because\triangle APO$是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形,

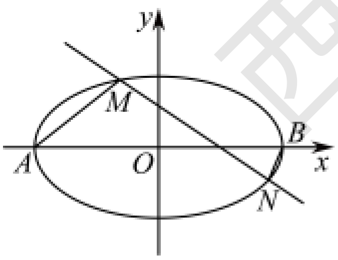
$\therefore P\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,得 $\dfrac{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}{b^2}=1$,整理得 $a^2=3b^2$.

$\because\triangle APO$的面积为 1,$\therefore\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{a}{2}=1$,$\therefore a^2=4$,$\therefore b^2=\dfrac{4}{3}$.

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{4}=1$.

（2）设直线 AM 的斜率为 k_1,直线 BN 的斜率为 k_2,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

直线 MN 的方程为 $x=my+1$.



不妨设 $y_2<0<y_1$,则 $k_1=\tan\angle MAB$, $k_2=\tan\angle NBA$.

联立$\begin{cases}x=my+1,\\x^2+3y^2=4\end{cases}$可得 $(m^2+3)y^2+2my-3=0$,

$\Delta=16m^2+36>0$,则 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3}$,$y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+3}$,

$\therefore \dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\dfrac{2m}{3}$，即$2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

$$\therefore \frac{k_1}{k_2}=\frac{\dfrac{y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1(my_2-1)}{(my_1+3)y_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$$

$$=\frac{\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{3}{2}y_2}{\dfrac{3}{2}y_1+\dfrac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3},$$

$\therefore 3k_1=k_2$，

故$3\tan\angle MAB=\tan\angle NBA$得证.

【点睛】关键点睛：本题第二问的关键第一是要找到正切值与直线斜率的关系，再通过设直线MN的方程为$x=my+1$，将与椭圆联立，利用化积为和的方法得到$2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，最后再计算斜率比值为定值，化积为和是处理非对称韦达形式的常用方法.

21．已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+a,a\in\mathrm{R}$.

(1)若$a=0$，求不等式$xf(x)+x^2\ge\dfrac{2(x-1)}{x+1}$的解集；

(2)若$f(x)$存在两个不同的零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，证明：$\ln x_1+\ln x_2+x_1+x_2+x_1x_2>2+a$.

【答案】(1)$[1,+\infty)$；

(2)详见解析.

【分析】（1）$g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$由$g(x)$的单调性及$g(1)=0$可求解；

（2）根据函数$f(x)$存在两个不同的零点x_1,x_2，得$0<x_1<1<x_2$，$x_1\ln x_2-x_2\ln x_1=x_1x_2(x_2-x_1)$，将所证不等式转化为$(x_1+1)\ln x_1-(x_2+1)\ln x_2+x_1\ln x_2-x_2\ln x_1+(x_1-x_2)x_1x_2-2(x_1-x_2)<0$，利用由(1)的过程知$(x_1+1)\ln x_1<2(x_1-1)$及$-(x_2+1)\ln x_2<2(1-x_2)$，代入可证得结论.

【详解】（1）令$g(x)=xf(x)+x^2-\dfrac{2(x-1)}{x+1}=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

则$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\ge 0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

因为$g(1)=0$，所以当$x\ge 1$时，$g(x)\ge 0$，当$0<x<1$时，$g(x)<0$，

所以原不等式的解集为$[1,+\infty)$.

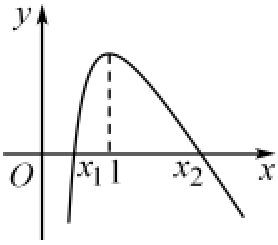
（2）证明：$f'(x)=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}$，令$h(x)=1-\ln x-x^2$，易知$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，且$h(1)=0$.

当$0<x<1$时，$h(x)>0$，此时$f'(x)>0,f(x)$单调递增；

当 $x\geq 1$时，$h(x)\leqslant 0$，此时 $f'(x)\leq 0, f(x)$单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=a-1$.

因为函数 $f(x)$ 存在两个不同的零点 x_1,x_2，所以 $a-1>0$，即 $a>1$，由图可知 $0<x_1<1<x_2$，



由题意知 $f(x_1)=\dfrac{\ln x_1}{x_1}-x_1+a=0, f(x_2)=\dfrac{\ln x_2}{x_2}-x_2+a=0$，

所以 $\ln x_1=x_1^2-ax_1, \ln x_2=x_2^2-ax_2$，

两式相减得 $a=x_1+x_2+\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_1-x_2}$.

所以 $\ln x_1+\ln x_2+x_1+x_2+x_1x_2>2+a$ 等价于

$(x_1-x_2)(\ln x_1+\ln x_2)+(x_1-x_2)x_1x_2-2(x_1-x_2)+\ln x_1-\ln x_2<0$，

也等价于 $(x_1+1)\ln x_1-(x_2+1)\ln x_2+x_1\ln x_2-x_2\ln x_1+(x_1-x_2)x_1x_2-2(x_1-x_2)<0$.

因为 $0<x_1<1<x_2$，所以由(1)的解题过程知 $(x_1+1)\ln x_1<2(x_1-1)$……①

$-(x_2+1)\ln x_2<2(1-x_2)$……②

因为 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}-x_1+a=\dfrac{\ln x_2}{x_2}-x_2+a$，所以 $\dfrac{x_2\ln x_1-x_1\ln x_2}{x_1x_2}=x_1-x_2$，

即 $x_1\ln x_2-x_2\ln x_1=x_1x_2(x_2-x_1)$……③

①+②+③得 $(x_1+1)\ln x_1-(x_2+1)\ln x_2+x_1\ln x_2-x_2\ln x_1+(x_1-x_2)x_1x_2-2(x_1-x_2)<0$，

所以 $\ln x_1+\ln x_2+x_1+x_2+x_1x_2>2+a$.

【点睛】关键点点睛：本题难点在零点的转化应用：由 $f(x)$ 的零点为 x_1,x_2 得：

（1）$\ln x_1=x_1^2-ax_1, \ln x_2=x_2^2-ax_2$，两式相减得 $a=x_1+x_2+\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_1-x_2}$，使用此时代入消去 a.

（2）由 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}-x_1+a=\dfrac{\ln x_2}{x_2}-x_2+a$ 得 $\dfrac{x_2\ln x_1-x_1\ln x_2}{x_1x_2}=x_1-x_2$ 即 $x_1\ln x_2-x_2\ln x_1=x_1x_2(x_2-x_1)$，使用此时代入消去 $x_1x_2(x_2-x_1)$.

本题中两次对零点的使用都富有创新性.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$．

(1)设曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A，B 两点，求 $|AB|$；

(2)若 M，N 是曲线 C_1 上的两个动点，且 $OM\perp ON$，求 $|OM|\cdot|ON|$ 的取值范围．

【答案】(1)$2\sqrt{5}$

(2)$\left[\frac{32}{5},8\right]$

【分析】（1）首先将曲线 C_1 的参数方程化为普通方程，曲线 C_2 的极坐标方程化为直角坐标方程，再联立两曲线方程，求出交点坐标，再由距离公式计算可得；

（2）首先求出曲线 C_1 的坐标方程，设 $M(\rho_1,\theta_1)$，$N\left(\rho_2,\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$，即可表示出 $|OM|\cdot|ON|$，再利用二倍角公式公式化简，最后结合正弦函数的性质计算可得.

【详解】（1）因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\alpha\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

所以 $\begin{cases}\frac{x}{4}=\cos\alpha\\ \frac{y}{2}=\sin\alpha\end{cases}$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，

又曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$，由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x+2y-4=0$，

由 $\begin{cases}x+2y-4=0\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}$，所以 $|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$.

（2）又 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，所以 $\frac{(\rho\cos\theta)^2}{16}+\frac{(\rho\sin\theta)^2}{4}=1$，

所以 $\rho=\frac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$，即曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=\frac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$，

因为 $OM\perp ON$，所以设 $M(\rho_1,\theta_1)$，$N\left(\rho_2,\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$|OM|\cdot|ON|=\frac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta_1}}\cdot\frac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)}}$

$=\frac{16}{\sqrt{(1+3\sin^2\theta_1)(1+3\cos^2\theta_1)}}$

$=\frac{16}{\sqrt{4+9\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1}}$

$=\frac{16}{\sqrt{4+\frac{9}{4}\sin^2 2\theta_1}}$，

所以当$\sin^2 2\theta_1=1$时$|OM|\cdot|ON|$取得最小值$\frac{32}{5}$，

当$\sin^2 2\theta_1=0$时$|OM|\cdot|ON|$取得最大值8，

所以$|OM|\cdot|ON|$的取值范围为$\left[\frac{32}{5},8\right]$.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知$a>0$，$b>0$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$．

(1)证明：$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\le 1$．

(2)证明：$3ab+\frac{8}{a+b}\le 5+a^2+b^2$．

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】（1）根据已知条件及基本不等式即可求解；

（2）利用分析法及作差比较法即可求解.

【详解】（1）由基本不等式可得$2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{\sqrt{ab}}$，可得$ab\ge 1$,

当且仅当$a=b=1$时，等号成立.

又由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，得$a+b=2ab$，

所以$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}=\frac{2ab+2}{3ab+1}=\frac{2}{3}+\frac{4}{9ab+3}\le 1$,当且仅当$a=b=1$时，等号成立.

故原不等式得证.

（2）要证$3ab+\frac{8}{a+b}\le 5+a^2+b^2$，即证$5ab+\frac{4}{ab}\le 5+(a+b)^2$,

即证$5ab+\frac{4}{ab}\le 5+4a^2b^2$,

令 $t=ab\geq 1$，即证 $5t+\frac{4}{t}\leq 5+4t^2$，

因为 $5+4t^2-5t-\frac{4}{t}=\frac{4(t^3-1)}{t}-5(t-1)=\frac{(t-1)(4t^2-t+4)}{t}$，且 $t-1\geq 0, 4t^2-t+4=4\left(t-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{63}{16}>0$，

故 $5+4t^2-5t-\frac{4}{t}\geq 0$，即原不等式得证.